Вычислительные методы в задачах и упражнениях

Однородные линейные разностные уравнения 2-го порядка

1°. Однородное линейное разностное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами — это уравнение для вектора u_j бесконечной размерности

$$au_{j+2} + bu_{j+1} + cu_j = 0,$$

где $a, b, c = \text{const}$ и $a, b, c \neq 0$.

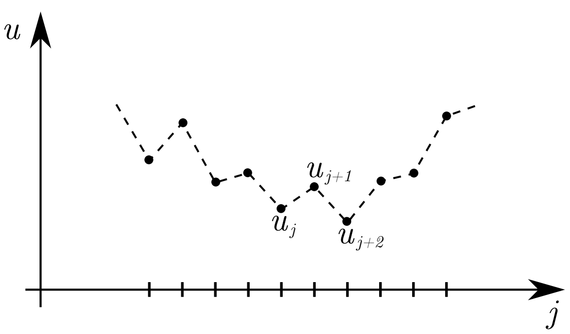

Рис. 1: Представление вектора решения u_j как сеточной функции

2°. Общее решение однородного линейного разностного уравнения 2-го порядка есть линейная комбинация двух линейно-независимых частных решений

$$u_j = C_1 u_j^{(1)} + C_2 u_j^{(2)}.$$

В качестве частных решений $u_j^{(1)}$ и $u_j^{(2)}$ можно рассмотреть следующие решения: $u_j^{(1),(2)} = \lambda_{1,2}^j$, где $\lambda_{1,2}$ — корни характеристического уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Если корень характеристического уравнения один, то можно рассмотреть частные решения: $u_j^{(1)} = \lambda^j$ и $u_j^{(2)} = j\lambda^j$. В случае комплекснозначных корней характеристического уравнения удобно использовать следующие частные решения: $u_j = \left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^j \cos j\phi$, $u_j = \left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^j \sin j\phi$, где $\cos\phi = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}$.

1. Доказать, что $\forall m$ решение u_j начальной задачи существует и единственно:

$$\begin{aligned} &au_{j+2} + bu_{j+1} + cu_j = 0,\\ &u_m = u_a,\\ &u_{m+1} = u_b. \end{aligned}$$

2. Найти решение u_j начальной задачи для разностного уравнения

$$\begin{aligned} &u_{j+2} - 10u_{j+1} + 21u_j = 0, \\ &u_0 = 1, \\ &u_1 = 2. \end{aligned}$$

3. Последовательность чисел Фиббоначи:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 2, \quad u_4 = 3, \quad u_5 = 5, \quad u_6 = 8, \quad u_7 = 13, \quad \ldots$$

Выписать 1000-й член этой последовательности.

4. Найти решение u_j начальной задачи для разностного уравнения

$$\begin{aligned} &2u_{j+2} - 2\sqrt{2}u_{j+1} + u_j = 0, \\ &u_0 = 0, \\ &u_1 = 1. \end{aligned}$$

5. Найти общее решение $u_j(p)$ разностного уравнения в зависимости от значения $p = \mathrm{const}$

$$u_{j+2} - 2p^2 u_{j+1} + u_j = 0.$$

6. Найти ограниченное решение u_j задачи для разностного уравнения

$$\begin{aligned} &u_{j+2} - 3u_{j+1} + 2u_j = 0, \\ &u_0 = 1. \end{aligned}$$

7. Найти решение u_j краевой задачи для разностного уравнения

$$\begin{aligned} &u_{j+2} - u_{j+1} + u_j = 0, \\ &u_0 = 0. \end{aligned}$$

а) если $u_{300} = 1$,
б) если $u_{300} = 0$.

8. Найти условия, накладываемые на корни характеристического уравнения, необходимые и достаточные для того чтобы, разностное уравнение

$$au_{j+2} + bu_{j+1} + cu_j = 0$$

а) имело хотя бы одно нетривиальное ограниченное решение,
б) все решения этого разностного уравнения были ограничены,
в) все решения этого разностного уравнения $u_j \to 0$ при $j \to +\infty$.

9. Вычислить следующий определитель в зависимости от k

$$\Delta_k = \underbrace{\begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}}_{k}.$$

10*. Найти общее решение u_j разностного уравнения с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} &u_{2j+1} + u_{2j} - u_{2j-1} = 0, \\ &u_{2j+2} - u_{2j+1} - u_{2j} = 0. \end{aligned}$$

Локальная и глобальная погрешности методов типа Рунге – Кутты

1°. З а д а ч а К о ш и для Обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка:

$$u' = f(x, u),$$
$$u\big|_{x=a} = u_a.$$

2°. М е т о д с т е п е н н ы х р я д о в заключается в вычислении следующего значения u_{j+1} используя заданное количество слагаемых разложения решения в ряд Тейлора:

$$u|_{x=x_{j+1}} = u|_{x=x_j} + h\, u'|_{x=x_j} + \frac{h^2}{2}\, u''|_{x=x_j} + \frac{h^3}{6}\, u'''|_{x=x_j} + \frac{h^4}{24}\, u''''|_{x=x_j} + O(h^5).$$

где производные функции решения могут быть вычислены по формулам:

$$u'|_{x=x_j} = f\Big|_{\substack{x=x_j\\u=u(x_j)}},$$
$$u''|_{x=x_j} = [f_x + f f_u]\Big|_{\substack{x=x_j\\u=u(x_j)}},$$
$$u'''|_{x=x_j} = \left[f_{xx} + 2f f_{xu} + f_x f_u + f\,(f_u)^2 + f^2 f_{uu}\right]\Big|_{\substack{x=x_j\\u=u(x_j)}},$$
$$\vdots$$

3°. Л о к а л ь н а я п о г р е ш н о с т ь метода типа Рунге – Кутты $||\varepsilon^0||_{L_\infty} = \max\limits_j |\varepsilon_j^0| = \max\limits_j |u_j - u(x_j)|$, если $u_{j-m} = u(x_{j-m})$, при $j \geqslant m > 0$. При определении локальной погрешности для явных одношаговых методов полезно сравнивать формулу исследуемого метода с формулой метода степенных рядов.

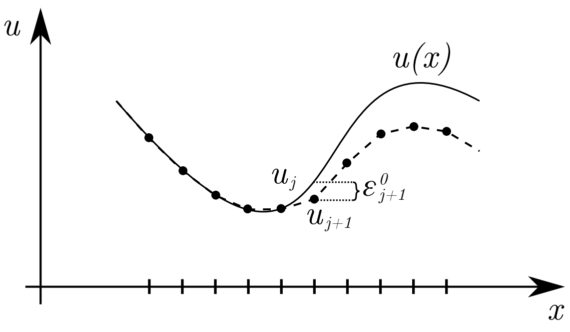

Рис. 2: Графическое пояснение определения локальной погрешности ε_j^0. Все предыдущие значения функции решения вычислены точно ($u_j = u(x_j)$, $u_{j-1} = u(x_j - 1)$, $\ldots$). Локальная погрешность — это погрешность, которая накапливается при вычислении следующего значения u_{j+1} при всех предыдущих значениях, вычисленных точно.

4°. Г л о б а л ь н а я п о г р е ш н о с т ь метода типа Рунге – Кутты $||\varepsilon||_{L_\infty} = \max\limits_j |\varepsilon_j| = \max\limits_j |u_j - u(x_j)|$.

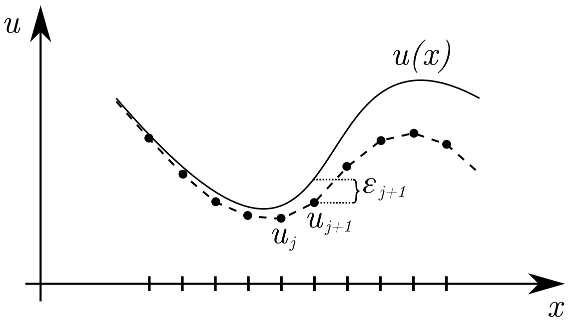

Рис. 3: Графическое пояснение определения глобальной погрешности ε_j. Глобальная погрешность — это разница между точным и приближенным решениями.

1. Методом Эйлера
$$u_{j+1} = u_j + hf(x_j, u_j)$$
отыскать численное решение u_j задачи Коши
$$u' - \alpha u = 0,$$
$$u\Big|_{x=0} = 1,$$
где $\alpha = \text{const} > 0$. Выяснить к чему стремится численное решение при $h \to 0$.

2. Определить локальную погрешность метода Эйлера.

3. Доказать, что глобальная погрешнось метода Эйлера удовлетворяет следующей оценке:
$$||\varepsilon|| \leqslant h\frac{C}{M}\left(e^{ML} - 1\right),$$
где $C = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant L} |u''(x)|$, $M = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant L} \left|\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|$, а L — длина отрезка на котором рассматривается задача.

4. Предложить такую задачу Коши для ОДУ первого порядка, для которой оценка из предыдущей задачи перейдет в строгое равенство.

5. Модифицированным методом Эйлера
$$u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}\left[f(x_j, u_j) + f(x_j + h, u_j + hf(x_j, u_j))\right].$$
отыскать численное решение u_j задачи Коши
$$u' - \alpha u = 0,$$
$$u\Big|_{x=0} = 1,$$
где $\alpha = \text{const} > 0$. Выяснить к чему стремится численное решение при $h \to 0$.

6. Определить локальную погрешность модифицированного метода Эйлера из предущей задачи.

7. Доказать, что если локальная погрешность метода равна $||\varepsilon^0|| = O(h^p)$, то его глобальная погрешность равна $||\varepsilon|| = O(h^{p-1})$.

8. Определить локальную и глобальную погрешности метода

$$u_{j+1} = u_j + hf\left(x_j + \frac{h}{2}, u_j + \frac{h}{2}f(x_j, u_j)\right).$$

9. Определить локальную и глобальную погрешности метода

$$\begin{aligned}
&k_1 = hf(x_j, u_j),\\
&k_2 = hf\left(x_j + \frac{h}{5}, u_j + \frac{k_1}{5}\right),\\
&u_{j+1} = u_j - \frac{3}{2}k_1 + \frac{5}{2}k_2.
\end{aligned}$$

10. Вывести условия на $A = \text{const}$ и на $f(x, u)$, чтобы локальная погрешность метода

$$\begin{aligned}
&k_1 = hf(x_j, u_j),\\
&k_2 = hf\left(x_j + \frac{h}{2A}, u_j + \frac{k_1}{2A}\right),\\
&u_{j+1} = u_j + (1 - A)k_1 + Ak_2.
\end{aligned}$$

была $||\varepsilon^0|| = O(h^4)$.

11*. Определить локальную и глобальную погрешности неявного метода Эйлера

$$u_{j+1} = u_j + hf(x_{j+1}, u_{j+1}).$$

12. При каком условии на шаг h метод простых итераций для решения нелинейного уравнения, возникающего на каждом шаге метода Эйлера, сходится:

$$\begin{aligned}
&u_{j+1}^0 = u_j,\\
&u_{j+1}^{n+1} = u_j + hf(x_{j+1}, u_{j+1}^n).
\end{aligned}$$

Аппроксимация разностных операторов и схем для ОДУ

1°. Разностный оператор $L_h u_h$ аппроксимирует дифференциальный оператор Lu с порядком p если

$$||(Lu)_h - L_h(u)_h|| \leqslant Ch^p$$

Исследование порядка аппроксимации производится с использованием разложений функции u в ряды Тейлора. При этом порядок аппроксимации зависит от выбора точки разложения. Погрешностью аппроксимации называется величина $\Psi_h = (Lu)_h - L_h(u)_h$.

2°. Разностная схема $L_h u_h = f_h$ аппроксимирует дифференциальную задачу $Lu = f$ с порядком p если

$$||(Lu)_h - L_h(u)_h + (f)_h - f_h|| \leqslant Ch^p$$

При этом порядок аппроксимации не зависит от выбора точки разложения в ряд Тейлора.

1. Показать, что разностный оператор

$$\frac{3u_{j+1} - 4u_j + u_{j-1}}{2h}$$

аппроксимирует $u'(x_{j+1})$ со вторым порядком по h.

2. Предложить разностный оператор на трехточечном шаблоне (x_{j+1}, x_j, x_{j-1}), который аппроксимирует $u'(x_{j-1})$ со вторым порядком по h.

3. Для разностного оператора с весом σ

$$\frac{\sigma\Delta_{j+1/2}u + (1-\sigma)\Delta_{j-1/2}u}{h}$$

определить порядок аппроксимации в точке x_j в зависимости от веса σ. Здесь $\Delta_{j+1/2}u = u_{j+1} - u_j$.

4. Предложить разностный оператор на трехточечном шаблоне (x_{j+1}, x_j, x_{j-1}) неравномерной сетки $(h_j = x_j - x_{j-1})$, который аппроксимирует $u'(x_j)$.

5. Определить, что и с каким порядком аппроксимирует следующий разностный оператор:

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}.$$

6. Определить, что и с каким порядком аппроксимирует следующий разностный оператор:

$$\frac{-u_{j+2} + 16u_{j+1} - 30u_j + 16u_{j-1} - u_{j-2}}{12h^2}.$$

7. Предложить разностный оператор на трехточечном шаблоне (x_{j+1}, x_j, x_{j-1}) неравномерной сетки $(h_j = x_j - x_{j-1})$, который аппроксимирует $u''(x_j)$.

8. Предложить разностный оператор на шаблоне сетки $(x_{j+2}, x_{j+1}, x_j, x_{j-1})$, который аппроксимирует:
а) $u''(x_{j+1/2})$ с $||\Psi_h|| \leqslant Ch^4$,
б) $u''(x_j)$ с $||\Psi_h|| \leqslant Ch^2$.

9. С каким порядком разностный оператор

$$\frac{u_{j+1} + u_{j-1}}{2}$$

аппроксимирует $u(x_j)$, если
а) $u(x) \in \mathbb{C}^1$,
б) $u(x) \in \mathbb{C}^2$.

10. Определить, что и с каким порядком аппроксимирует следующий разностный оператор:

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + \frac{1}{h^2}\left(\frac{u_{j+2} + u_j}{2} - 2u_j + \frac{u_j + u_{j-2}}{2}\right).$$

11. Определить, что и с каким порядком аппроксимирует следующий разностный оператор:

$$\frac{u_{j+1} + u_{j-1}}{2} + \frac{u_{j+2} - 16u_{j+1} + 30u_j - 16u_{j-1} + u_{j-2}}{24}.$$

12. С каким порядком разностный оператор

$$L_h u_h = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + \alpha u_j$$

аппроксимирует $Lu = u' + \alpha u$, где $\alpha = \mathrm{const}$?

13. С каким порядком разностный оператор

$$L_h u_h = \frac{u_{j+1} - u_j}{h} + \alpha\frac{u_{j+1} + u_j}{2}$$

аппроксимирует $Lu = u' + \alpha u$, где $\alpha = \mathrm{const}$?

14. При каких значениях параметров α, β, γ и условии на функцию $u(x)$ разностный оператор

$$L_h u_h = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + \alpha u_{j+1} + \beta u_j + \gamma u_{j-1}$$

аппроксимирует $Lu = u'' + u$ с четвертым порядком?

15. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + u_j = x_j + 1,\\
&u_0 = 0,\\
&u_1 = (1 + a)h,
\end{aligned}$$

которая аппроксимирует следующую дифференциальную задачу:

$$\begin{aligned}
&u' + u = x + 1,\\
&u|_{x=a} = 0,
\end{aligned}$$

16. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{j+1} - u_j}{h} = f|_{x=x_j} + \frac{h}{2} f'|_{x=x_j} + \frac{h^2}{6} f(x)|_{x=x_j}, \\
&u_0 = u_a,
\end{aligned}$$

которая аппроксимирует следующую дифференциальную задачу:

$$\begin{aligned}
&u' = f(x), \\
&u|_{x=a} = u_a,
\end{aligned}$$

17. Для дифференциальной задачи:

$$\begin{aligned}
&u' - 2u = f(x), \\
&u(a) = u_a
\end{aligned}$$

сконструировать $L_h u_h = f_h$, такую что $||\Psi_h|| \leqslant Ch^4$.

18. Для дифференциальной задачи:

$$\begin{aligned}
&u'' + 5u = f(x), \\
&u\Big|_{x=a} = u_a, \\
&u'\Big|_{x=a} = u_b
\end{aligned}$$

сконструировать $L_h u_h = f_h$, такую что $||\Psi_h|| \leqslant Ch^3$.